相干声波信号 DOA 单快拍矢量平滑估计与跟踪算法

虞 飞[1],陶建武[1],李京书[2]
(1.空军航空大学航空控制工程系,吉林长春 130022; 2.海军工程大学导航工程系,湖北武汉 430033)

摘 要: 本文研究了基于声矢量传感器阵列的相干信号波达方向(DOA)估计和跟踪问题.首先,根据中心对称均匀线阵方向矩阵的平移不变特性,提出了一种增强阵列有效孔径的单快拍矢量平滑估计算法(PVFSIA),该算法可以用于相干信号的 DOA 快速估计.在此基础上,提出了基于迭代的相干信号 DOA 跟踪算法,该算法无需奇异值分解和矩阵求逆运算,具有较快的跟踪速度.最后,对 PVFSIA 算法进行了扰动分析,给出了 DOA 估计误差的理论方差表达式.仿真实验验证了算法的有效性.

关键词: 声矢量传感器阵列; 相干信号; 波达方向; 平移不变特性; 空间平滑算法; 子空间跟踪
中图分类号: TP391.1; TN911.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2011) 12-2733-08

Direction Finding and Subspace Tracking of Coherent Acoustic Signals with Single Snapshot Smoothing Based on Vector Sensor Array

YU Fei[1], TAO Jian-wu[1], LI Jing-shu[2]
(1. *Department of Control Engineering*, *Aviation University*, *Changchun*, *Jilin* 130022, *China*;
2. *Department of Navigation Engineering*, *Navy University of Engineering*, *Wuhan*, *Hubei* 430033, *China*)

Abstract: The problem of direction-of-arrival (DOA) estimation and subspace tracking of coherent signals is researched based on acoustic vector sensor array. According to the shift invariance property of the steering matrix of the linear array with the centre of symmetry, we propose a new "particle-velocity-field smoothing" algorithm (PVFSIA), with improved effective array aperture, which is based on single snapshot smoothing and available for the fast estimates of DOA in multi-path environment. Then a subspace tracking algorithm of coherent sources based on iteration is presented, which has higher tracking speed, and requires neither the eigen-decomposition into signal/noise subspace nor the inverse operation of matrix. Finally, the perturbation analysis of PVFSIA is introduced and the theoretical covariance formulas of fast DOA estimates are given. Simulation results are shown to verify the efficacy of the proposed algorithm.

Key words: acoustic vector sensor array; coherent signals; direction of arrival; shift invariance property; spatial smoothing; subspace tracking

1 引言

声矢量传感器一般是由三个相同的,且正交放置的声波质点速度传感器和一个声波压力传感器复合而成的,作为一种新型的水声测量设备,它能空间共点、时间同步测得声场中某点处的声压和质点振速矢量,充分利用了声场振速所具备的矢量特性.此外,矢量传感器还具备与频率无关的指向性以及抵消各向同性噪声的能力,这些都是矢量传感器相对于标量传感器的优势,在实际应用中非常有用.

基于声矢量传感器阵列采用子空间技术的 DOA 估计算法已经被广泛研究[1,2],它们适用于不相干信号.但在实际环境中,由于多径传播等因素的影响,相干信号是普遍存在的.为了利用子空间技术估计相干信号的 DOA,首先需要用预处理方法来恢复信号协方差矩阵的秩,使其大于或等于相干信号数[3].空间平滑算法是最早被提出的预处理方法,但它以牺牲阵列的有效孔径为代价来恢复信号协方差矩阵的秩,从而导致阵列分辨率和 DOA 估计精度的下降.由于矢量传感器特殊的物理结构,使其解相干处理算法的研究具有更大的灵活性,

收稿日期:2011-01-01;修回日期:2011-06-30
基金项目:国家自然科学基金(No.60872088,No.61172126)

文献[4,5]基于矢量传感器阵列提出了一种矢量平滑算法,其优点是阵列的空间孔径没有损失,但是该算法需要二维角度搜索,运算量较大,且采用的是多次采样数据,需要很大的数据存储空间.而文献[6]提出了一种改进的空间平滑算法,此算法的优点是提高了阵列有效孔径,且仅利用单快拍接收数据.本文提出了一种基于声矢量传感器阵列的单快拍矢量平滑估计算法,此算法不仅增加了整个阵列的空间孔径,而且可以缩短DOA估计时间.进一步本文从特征向量、特征值和方向余弦这三个方面对单快拍矢量平滑估计算法进行了扰动分析,给出了估计误差的方差表达式,为从理论上评价算法的性能提供了依据.

在实际应用中,目标信号源通常是移动的,需要对其DOA进行准确的跟踪估计.为了解决DOA跟踪问题,近年来,子空间跟踪技术[7,8]得到了广泛的研究.这些算法利用当前时刻接收到的数据对先前估计的子空间进行更新,具有较小的运算量.但这些算法不适用于相干信号的场合.针对这个问题,文献[9]将最大似然子空间估计(MALASE, Maximum Likelihood Adaptive Subspace Estimation)[10]算法与MUSIC(Multiple Signal Classification)算法[11]相结合,得到了自适应MUSIC算法,并成功地应用于声矢量传感器均匀直线阵的目标方位估计中.但该算法需要做角度搜索,运算量较大,跟踪精度不够高.本文将单快拍矢量平滑估计算法应用于目标跟踪场合,给出相干信号DOA批处理跟踪算法.考虑到单快拍矢量平滑估计算法中包含奇异值分解和矩阵求逆运算,计算量大,故进一步对批处理跟踪算法做了改进,提出了基于幂方法[12]的迭代跟踪算法,其优点是在保持较高跟踪精度的同时,缩短了估计时间,使算法的实时性更强.

2 阵列模型

声矢量传感器的四个组成单元被安装在同一个点上,其中三个质点速度传感器分别测量沿着三个坐标方向的声波质点速度,压力传感器测量声波压力.矢量传感器响应的归一化表达式为[1]

$$\boldsymbol{h}(\theta,\phi)=\begin{bmatrix} u(\theta,\phi) \\ v(\theta,\phi) \\ w(\theta) \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

其中,$\theta\in(-\pi/2,\pi/2]$(从 Z 轴测量)表示俯仰角,$\phi\in[0,2\pi)$表示方位角.

假定一个中心对称的均匀线性阵列含有 L 个矢量传感器,则第 l 个阵元的空间相移因子为

$$q_l(\theta,\phi)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi(l-1)\Delta}{\lambda}u}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}(l-1)\mu},\ l=1,\cdots,L \tag{2}$$

其中,λ 是信号的波长,Δ 表示两个相邻阵元的间距,$u=\sin\theta\cos\phi$ 表示信号的方向余弦,$\mu=\frac{2\pi\Delta}{\lambda}u$ 表示相邻阵元间接收信号的相位延迟.

考虑 K 个远场的窄带平面波信号从不同方向入射到此阵列.在 t 时刻,整个阵列的 $4L\times1$ 维输出矢量为:

$$z(t)=\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{a}(\theta_k,\phi_k)s_k(t)+\boldsymbol{n}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{s}(t)+\boldsymbol{n}(t) \tag{3}$$

式中,$\boldsymbol{a}(\theta_k,\phi_k)=\boldsymbol{h}(\theta_k,\phi_k)\otimes\boldsymbol{q}(\theta_k,\phi_k)$是 $4L\times1$ 维的导向矢量,"$\otimes$"表示Kronecker积,$\boldsymbol{q}(\theta_k,\phi_k)=[q_1(\theta_k,\phi_k)\cdots q_L(\theta_k,\phi k)]^{\mathrm{T}}$,这里,"$(\cdot)^{\mathrm{T}}$"表示矩阵的转置运算.$s_k(t)=\sqrt{p_k}\sigma_k(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\pi\frac{c}{\lambda}t+\varphi_k)}$表示第 k 个信号的复包络,p_k 表示第 k 个信号的功率,$\sigma_k(t)$是零均值单位方差的复随机过程,c 表示波的传播速度,φ_k 是第 k 个信号的在$[0,2\pi)$之间均匀分布随机相位.$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{a}(\theta_1,\phi_1)\cdots\boldsymbol{a}(\theta_K,\phi_K)]$为阵列的 $4L\times K$ 维方向矩阵,$\boldsymbol{s}(t)=[s_1(t)\cdots s_K(t)]^{\mathrm{T}}$ 为信号的 $K\times1$ 维矢量,$\boldsymbol{n}(t)=[n_1(t)\cdots n_{4L}(t)]^{\mathrm{T}}$ 为阵列的 $4L\times1$ 维加性白噪声矢量.

3 单快拍矢量平滑估计算法

阵列的 $4L\times K$ 维方向矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以划分为4个 $L\times K$ 维的子阵,即:

$$\boldsymbol{A}_j=\boldsymbol{J}_j\boldsymbol{A},\ j=1,\cdots,4 \tag{4}$$

其中,$\boldsymbol{J}_j$ 是一个 $L\times4L$ 维的选择矩阵:

$$\boldsymbol{J}_j=[\boldsymbol{O}_{L,L\times(j-1)}\ \vdots\ \boldsymbol{I}_L\ \vdots\ \boldsymbol{O}_{L,L\times(4-j)}],\ j=1,\cdots,4 \tag{5}$$

$\boldsymbol{O}_{M,N}$表示一个 $M\times N$ 的零矩阵,$\boldsymbol{I}_M$ 表示一个 $M\times M$ 的单位阵.$\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4$ 块子阵的相互关系为:

$$\boldsymbol{A}_j=\boldsymbol{A}_4\boldsymbol{\Phi}_j,\ j=1,\cdots,4 \tag{6}$$

其中,

$$\boldsymbol{A}_4=[\boldsymbol{q}(\theta_1,\phi_1),\cdots,\boldsymbol{q}(\theta_K,\phi_K)] \tag{7}$$

$$[\boldsymbol{\Phi}_j]_{k,k}=\begin{cases} u(\theta_k,\phi_k), & j=1 \\ v(\theta_k,\phi_k), & j=2 \\ w(\theta_k), & j=3 \\ 1, & j=4 \end{cases} \tag{8}$$

这里,$\boldsymbol{\Phi}_j$ 是对角元素为$\{[\boldsymbol{\Phi}_j]_{k,k},k=1,\cdots,K\}$的对角矩阵,且 $\boldsymbol{\Phi}_j$ 与阵元空间位置$\{(x_l,y_l,z_l),l=1,\cdots,L\}$无关.定义接收数据矩阵

$$\boldsymbol{Z}_{ss}=[\boldsymbol{J}_1z\quad\boldsymbol{J}_2z\quad\boldsymbol{J}_3z\quad\boldsymbol{J}_4z]\in\boldsymbol{C}^{L\times4} \tag{9}$$

为了书写方便,这里省略了符号"(t)".将式(3)、(4)和(6)代入上式可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Z}_{ss}&=[\boldsymbol{J}_1z,\boldsymbol{J}_2z,\boldsymbol{J}_3z,\boldsymbol{J}_4z]\\&=\boldsymbol{A}_4[\boldsymbol{\Lambda}\mathrm{Vec}(\boldsymbol{\Phi}_1),\boldsymbol{\Lambda}\mathrm{Vec}(\boldsymbol{\Phi}_2),\boldsymbol{\Lambda}\mathrm{Vec}(\boldsymbol{\Phi}_3),\boldsymbol{\Lambda}\mathrm{Vec}(\boldsymbol{\Phi}_4)]+\boldsymbol{N}_s\\&=\boldsymbol{A}_4\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{N}_s\end{aligned} \tag{10}$$

其中,

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix} s_1 & & & 0 \\ & s_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & s_K \end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} u(\theta_1,\phi_1) & v(\theta_1,\phi_1) & w(\theta_1) & 1 \\ u(\theta_2,\phi_2) & v(\theta_2,\phi_2) & w(\theta_2) & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u(\theta_K,\phi_K) & v(\theta_K,\phi_K) & w(\theta_K) & 1 \end{bmatrix},$$

$\boldsymbol{N}_s=[\boldsymbol{J}_1\boldsymbol{n},\boldsymbol{J}_2\boldsymbol{n},\boldsymbol{J}_3\boldsymbol{n},\boldsymbol{J}_4\boldsymbol{n}]$,Vec(·)为矩阵的向量化算子.

由于等距均匀线阵是中心对称阵列,因此阵列方向矩阵 $\boldsymbol{A}_4$ 满足下式:

$$\boldsymbol{\Pi}_L\boldsymbol{A}_4^*=\boldsymbol{A}_4\boldsymbol{\Lambda}_1,\boldsymbol{\Lambda}_1=\boldsymbol{\Phi}^{-(L-1)} \tag{11}$$

其中,$\boldsymbol{\Pi}_L$ 为 $L\times L$ 维的置换矩阵,其反对角元素均为 1,其他为 0,式中的阵列流型以第一个阵元为参考点,$(\cdot)^*$ 表示复共轭运算,$\boldsymbol{\Phi}=\mathrm{diag}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\mu_1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\mu_2},\cdots,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\mu_K}]$.所以

$$\boldsymbol{\Pi}_L\boldsymbol{Z}_{ss}^*=\boldsymbol{\Pi}_L\boldsymbol{A}_4^*\boldsymbol{\Lambda}^*\boldsymbol{B}^*+\boldsymbol{\Pi}_L\boldsymbol{N}_s^*=\boldsymbol{A}_4\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{\Lambda}^*\boldsymbol{B}+\boldsymbol{\Pi}_L\boldsymbol{N}_s^* \tag{12}$$

由于 $\boldsymbol{B}$ 是实数矩阵,所以 $\boldsymbol{B}^*=\boldsymbol{B}$.构造一个增广矩阵 $\boldsymbol{Z}_{\mathrm{aug}}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Z}_{\mathrm{aug}}&=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Z}_{ss}\\ \boldsymbol{\Pi}_L\boldsymbol{Z}_{ss}^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_4\boldsymbol{\Lambda}\\ \boldsymbol{A}_4\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{\Lambda}^*\end{bmatrix}\boldsymbol{B}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{N}_s\\ \boldsymbol{\Pi}_L\boldsymbol{N}_s^*\end{bmatrix}\\ &=\boldsymbol{A}_{\mathrm{aug}}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{N}_{\mathrm{aug}}\end{aligned} \tag{13}$$

这里,$\boldsymbol{A}_{\mathrm{aug}}\in\boldsymbol{C}^{2L\times K}$是中心对称阵列的方向矩阵.换句话说,我们构造了一个虚拟增广阵列,其阵元个数是构造前的两倍.增广阵列方向矩阵 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{aug}}$的行数是方向矩阵 $\boldsymbol{A}_4$ 行数的两倍,相当于增大了阵列的有效孔径,从而提高了阵列的分辨率和 DOA 估计的精度.增广阵列方向矩阵 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{aug}}$满足平移不变特性,即:

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{aug}}^{(1)}\cdot\boldsymbol{A}_{\mathrm{aug}}\cdot\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{J}_{\mathrm{aug}}^{(2)}\cdot\boldsymbol{A}_{\mathrm{aug}} \tag{14}$$

其中:$\boldsymbol{J}_{\mathrm{aug}}^{(i)}=\boldsymbol{I}_2\otimes\boldsymbol{J}_i$, $i=1,2$, $\boldsymbol{J}_1=[\boldsymbol{I}_l\quad 0_{l\times 1}]$, $\boldsymbol{J}_2=[0_{l\times 1}\quad \boldsymbol{I}_l]$, $l=L-1$.

对矩阵 $\boldsymbol{Z}_{\mathrm{aug}}$进行奇异值分解,其 K 个最大奇异值所对应的左奇异向量可构造成矩阵 $\boldsymbol{U}_{\mathrm{aug}}$,根据信号子空间原理可得,$\boldsymbol{U}_{\mathrm{aug}}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{A}_{\mathrm{aug}}$,$\boldsymbol{T}$ 是一个非奇异矩阵,将其代入式(14)得到下式

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{aug}}^{(1)}\cdot\boldsymbol{U}_{\mathrm{aug}}\cdot\boldsymbol{\Psi}=\boldsymbol{J}_{\mathrm{aug}}^{(2)}\cdot\boldsymbol{U}_{\mathrm{aug}} \tag{15}$$

其中,$\boldsymbol{\Psi}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{T}^{-1}$.通过最小二乘(LS)或总体最小二乘(TLS)方法,求出矩阵 $\boldsymbol{\Psi}$,进而得到$\{\mu_k\}_{k=1}^K=\arg(\mathrm{eig}(\boldsymbol{\Psi}))$.

由上述分析可以看出,单快拍矢量平滑估计算法与传统的空间平滑算法相比的一个显著特点是,根据中心对称阵列的方向矩阵满足等式(11),并由此出发最终构造了一个虚拟增广阵列,此增广阵列的方向矩阵 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{aug}}$行数是构造前的 2 倍,使得阵列的有效孔径翻了一倍,从而提高了阵列的分辨率和 DOA 估计的精度.另外,此算法仅使用一次采样数据,因此实时性好,适用于快变相干信号的 DOA 跟踪.

4　基于单快拍矢量平滑处理的跟踪算法

对相干信号进行动态跟踪时,若想得到很好的跟踪效果,要求解相干预处理算法的计算量尽可能小.

4.1　批处理跟踪算法

对于 $K(K\leqslant 4)$个远场窄带相干信号,考虑方向余弦估计 $\hat{u}(t)$随时间 t 变化的跟踪情况.基于单快拍矢量平滑的批处理跟踪算法步骤如下:

(1)从 t 时刻的测量数据 $z(t)$,构造接收数据矩阵:

$$\boldsymbol{Z}_{ss}(t)=[\boldsymbol{J}_1z(t)\quad \boldsymbol{J}_2z(t)\quad \boldsymbol{J}_3z(t)\quad \boldsymbol{J}_4z(t)]$$

(2)构造时刻 t 的增广矩阵 $\boldsymbol{Z}_{\mathrm{aug}}(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Z}_{ss}(t)\\ \boldsymbol{\Pi}_L\boldsymbol{Z}_{ss}^*(t)\end{bmatrix}$

(3)对 $\boldsymbol{Z}_{\mathrm{aug}}(t)$进行奇异值分解,取其由 K 个最大奇异值对应的左奇异矩阵的 K 列,构成矩阵 $\boldsymbol{U}_{\mathrm{aug}}(t)$.

(4)令 $\boldsymbol{U}_1(t)=\boldsymbol{J}_{\mathrm{aug}}^{(1)}\cdot\boldsymbol{U}_{\mathrm{aug}}(t)$,$\boldsymbol{U}_2(t)=\boldsymbol{J}_{\mathrm{aug}}^{(2)}\cdot\boldsymbol{U}_{\mathrm{aug}}(t)$,计算出最小二乘(LS)解:

$$\hat{\boldsymbol{\Psi}}_{\mathrm{LS}}(t)=[\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{H}}(t)\boldsymbol{U}_1(t)]^{-1}\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{H}}(t)\boldsymbol{U}_2(t)$$

(5)对 $\boldsymbol{\Psi}(t)$进行特征值分解,求出其全部特征值,取特征值的相位,即$\{\hat{\mu}_k(t)\}_{k=1}^K=\arg(\mathrm{eig}(\hat{\boldsymbol{\Psi}}(t)))$,从而求出 t 时刻各个信号方向余弦的估计值.

循环计算以上五步,可以求出各个时刻的动态目标方向余弦估计值,进而可以得到信号 DOA 的估计值.

4.2　基于迭代的跟踪算法

考虑到批处理算法中每次循环时都要进行计算量较大的奇异值分解和求逆运算.为了增强算法实时性,提出一种基于迭代的跟踪算法,从而避免了奇异值分解和矩阵求逆运算.

因为批处理跟踪算法的第(2)步需要对 $\boldsymbol{Z}_{\mathrm{aug}}(t)$进行奇异值分解,计算量较大.为了减小计算量,本文提出了基于幂方法[12]的增广矩阵 $\boldsymbol{Z}_{\mathrm{aug}}(t)$奇异值分解的迭代算法,具体步骤如下:

(1)$\boldsymbol{A}(t)=[\boldsymbol{Z}_{\mathrm{aug}}(t)\boldsymbol{Z}_{\mathrm{aug}}^{\mathrm{H}}(t)]/4$

(2)$\widetilde{\boldsymbol{W}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\overline{\boldsymbol{W}}(t-1)$

(3)$\widetilde{\boldsymbol{W}}(t)\Rightarrow\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{R}(t)$

(4)$\overline{\boldsymbol{W}}(t)=\boldsymbol{Q}(t)$的前 K 列

(5)$\boldsymbol{U}_{\mathrm{aug}}(t)=\overline{\boldsymbol{W}}(t)$

初始化:$\overline{\boldsymbol{W}}(0)=[\boldsymbol{e}_1\quad\cdots\quad\boldsymbol{e}_K]$,式中 $\boldsymbol{e}_i$ 表示单位矢量,除它的第 i 个元素为 1 外,其他都为 0.

批处理跟踪算法的第(4)步需要做矩阵求逆运算.本文采用正则方程组方法[13]求解 $\boldsymbol{\Psi}$,避免了矩阵求逆运算.

通过上述改进,基于迭代的跟踪算法步骤如下:

当 $t=0$ 时,初始化 $\overline{\boldsymbol{W}}(0)=[\boldsymbol{e}_1\quad\cdots\quad\boldsymbol{e}_K]$.

当 $t>0$ 时,

(1)根据 t 时刻的测量数据 $\boldsymbol{z}(t)$,构造接收数据

矩阵：

$$\boldsymbol{Z}_{ss}(t)=[\boldsymbol{J}_1\boldsymbol{z}(t)\quad \boldsymbol{J}_2\boldsymbol{z}(t)\quad \boldsymbol{J}_3\boldsymbol{z}(t)\quad \boldsymbol{J}_4\boldsymbol{z}(t)]$$

(2)构造增广矩阵 $\boldsymbol{Z}_{\mathrm{aug}}(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Z}_{ss}(t)\\ \boldsymbol{\Pi}_L\boldsymbol{Z}_{ss}^{*}(t)\end{bmatrix}$；

(3)令 $\boldsymbol{A}(t)=[\boldsymbol{Z}_{\mathrm{aug}}(t)\boldsymbol{Z}_{\mathrm{aug}}^{\mathrm{H}}(t)]/4$，计算 $\widetilde{\boldsymbol{W}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\overline{\boldsymbol{W}}(t-1)$；

(4)$\widetilde{\boldsymbol{W}}(t)\Rightarrow\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{R}(t)$，然后取 $\overline{\boldsymbol{W}}(t)=\boldsymbol{Q}(t)$的前 K 列，则 $\boldsymbol{U}_{\mathrm{aug}}(t)=\overline{\boldsymbol{W}}(t)$；

(5)令 $\boldsymbol{U}_1(t)=\boldsymbol{J}_{\mathrm{aug}}^{(1)}\cdot\boldsymbol{U}_{\mathrm{aug}}(t)$，$\boldsymbol{U}_2(t)=\boldsymbol{J}_{\mathrm{aug}}^{(2)}\cdot\boldsymbol{U}_{\mathrm{aug}}(t)$. 设 $\boldsymbol{U}_2(t)=[\boldsymbol{b}_1(t)\quad \boldsymbol{b}_2(t)\quad \cdots\quad \boldsymbol{b}_K(t)]$，对于 $i=1,\cdots,K$，进行如下运算：

(a)$\boldsymbol{C}(t)=\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{H}}(t)\boldsymbol{U}_1(t)$

(b)$\boldsymbol{d}(t)=\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{H}}(t)\boldsymbol{b}_i(t)$

(c)$\boldsymbol{C}(t)\overset{\mathrm{chol}}{=}\boldsymbol{G}(t)\boldsymbol{G}^{\mathrm{H}}(t)$（符号“chol”表示矩阵的 cholesky 分解）

(d)求解 $\boldsymbol{G}(t)\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{d}(t)$和 $\boldsymbol{G}^{\mathrm{H}}(t)\hat{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{1S}i}(t)=\boldsymbol{y}(t)$

最终，求得 $\hat{\boldsymbol{\Psi}}_{\mathrm{1S}}(t)=[\hat{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{1S1}}(t)\cdots\hat{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{1S}K}(t)]$.

(6)对 $\hat{\boldsymbol{\Psi}}_{\mathrm{1S}}(t)$进行特征值分解，求出其全部特征值，取特征值的相位，即$\{\hat{\mu}_k(t)\}_{k=1}^{K}=\arg(\mathrm{eig}(\hat{\boldsymbol{\Psi}}_{\mathrm{1S}}(t)))$，从而求出 t 时刻各个信号方向余弦的估计值.

循环以上六步，可以求出各个时刻的动态目标的方向余弦估计值.

4.3 计算量分析与比较

设 MDN 表示复数乘和除的次数，现结合批处理跟踪算法和迭代跟踪算法的主要区别，即奇异值分解和最小二乘法来比较两种算法的计算量. 由前面推导过程可知，$\boldsymbol{Z}_{\mathrm{aug}}(t)\in\boldsymbol{C}^{2L\times 4}$，$\boldsymbol{U}_1(t)$，$\boldsymbol{U}_2(t)\in\boldsymbol{C}^{2(L-1)\times K}$，$\boldsymbol{\Psi}(t)\in\boldsymbol{C}^{K\times K}$，$\boldsymbol{A}(t)\in\boldsymbol{C}^{2L\times 2L}$，$\overline{\boldsymbol{W}}(t)$，$\widetilde{\boldsymbol{W}}(t)\in\boldsymbol{C}^{2L\times K}$. 在批处理跟踪算法的每一次估计中，计算 $\boldsymbol{Z}_{\mathrm{aug}}(t)$的奇异值分解需要 $\eta_1=2\times(2L)^3+(2L)^2\times 4$ 次 MDN[13]；计算 $\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{H}}(t)\boldsymbol{U}_1(t)$需要 $K\times 2(L-1)K$ 次 MDN，计算 $(\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{H}}(t)\boldsymbol{U}_1(t))^{-1}$ 需要 $\frac{2}{3}K^3$ 次 MDN，计算 $(\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{H}}(t)\boldsymbol{U}_1(t))^{-1}\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{H}}(t)$需要 $2K^2(L-1)$次 MDN，计算 $(\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{H}}(t)\boldsymbol{U}_1(t))^{-1}\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{H}}(t)\boldsymbol{U}_2(t)$需 $2K^2(L-1)$次 MDN，因此求解 $\boldsymbol{\Psi}(t)$共需要 $\eta_2=6K^2(L-1)+\frac{2}{3}K^3$ 次 MDN. 故在批处理算法中(3)和(4)步所需的 MDN 次数近似为

$$\eta=\eta_1+\eta_2=16L^3+16L^2+6K^2(L-1)+\frac{2}{3}K^3 \tag{16}$$

同理分析，可计算出基于迭代的跟踪算法中(3)、(4)和(5)步所需的 MDN 次数大致为

$$\bar{\eta}=\bar{\eta}_1+\bar{\eta}_2=12L^2K+16L^2+\frac{K^4}{3}+K^3(2L-\frac{5}{3})-2LK^2 \tag{17}$$

考虑约束 $K\leqslant L$，并根据式(16)和式(17)，表 1 和表 2 分别给出了在 $K\leqslant 4$ 情况下，批处理跟踪算法和迭代跟踪算法的 MDN 随 L 和 K 的变化情况.

表 1 批处理跟踪算法

K \ L	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	33	199	589	1299	2425	4063	6309	9259	13009	17655
2		221	629	1357	2501	4157	6421	9389	13157	17821
3			702	1460	2634	4320	6614	9612	13410	18104
4				1611	2827	4555	6891	9931	13771	18507

表 2 迭代跟踪算法

K \ L	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	27	109	250	446	698	1006	1371	1790	2267	2798
2		168	376	664	1032	1480	2008	2616	3304	4072
3			558	958	1462	2070	2782	3598	4518	5542
4				1386	2059	2858	3786	4843	6027	7339

由表 1 和表 2 可见，迭代跟踪算法的运算量要低于批处理跟踪方法，尤其是当阵元个数 L 增加时，迭代跟踪算法的优势更加明显.

5 单快拍矢量平滑估计算法的扰动分析

本节将从特征向量、特征值和方向余弦三个方面进行扰动分析，给出了估计误差的方差表达式，从而为从理论上评价算法的性能提供了依据.

5.1 特征向量的扰动分析

设 $\boldsymbol{Y}_{\mathrm{aug}}=\boldsymbol{Z}_{\mathrm{aug}}-\boldsymbol{N}_{\mathrm{aug}}$为无噪数据，则单快拍矢量平滑估计算法的样本协方差矩阵为

$$\bar{\boldsymbol{R}}_{zz}=\boldsymbol{Z}_{\mathrm{aug}}\boldsymbol{Z}_{\mathrm{aug}}^{\mathrm{H}} \tag{18}$$

下面对样本协方差矩阵 $\bar{\boldsymbol{R}}_{zz}$的特征向量进行扰动分析. 定义扰动矩阵 $\boldsymbol{V}=\bar{\boldsymbol{R}}_{zz}-\boldsymbol{R}_{zz}$，其中 $\boldsymbol{R}_{zz}=\mathrm{E}\{\bar{\boldsymbol{R}}_{zz}\}$. 由定义可知，扰动矩阵 $\boldsymbol{V}$ 是 Hermitian 矩阵，且 $\mathrm{E}\{\boldsymbol{V}\}=0$. 设 $\boldsymbol{R}_{zz}=\boldsymbol{U}_s\boldsymbol{\Sigma}_s^2\boldsymbol{U}_s^{\mathrm{H}}+\boldsymbol{U}_n\boldsymbol{\Sigma}_n^2\boldsymbol{U}_n^{\mathrm{H}}$，$\boldsymbol{u}_\upsilon$ 为 $\boldsymbol{R}_{zz}$的第 υ 个特征向量，σ_υ^2 为 $\boldsymbol{R}_{zz}$的第 υ 个特征值，$\Delta\boldsymbol{u}_\upsilon$ 表示因 $\boldsymbol{V}$ 的影响使 $\boldsymbol{u}_\upsilon$ 产生的扰动量. 假设 $\boldsymbol{R}_{zz}$的特征值互异，则由文献[14]可得，$\Delta\boldsymbol{u}_\upsilon$ 与 $\Delta\boldsymbol{u}_\omega(\upsilon,\omega\leqslant K$，$K$ 为信号个数)的互相关矩阵的一阶近似表达式为

$$\mathrm{E}\{\Delta\boldsymbol{u}_\upsilon\Delta\boldsymbol{u}_\omega^{\mathrm{H}}\}=\sum_{j=1,j\neq\upsilon}^{2L}\ \sum_{i=1,i\neq\omega}^{2L}\frac{\mathrm{E}\{\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{H}}\bar{\boldsymbol{R}}_{zz}\boldsymbol{u}_\upsilon\boldsymbol{u}_\omega^{\mathrm{H}}\bar{\boldsymbol{R}}_{zz}\boldsymbol{u}_i\}}{(\sigma_\upsilon^2-\sigma_j^2)(\sigma_\omega^2-\sigma_i^2)}\boldsymbol{u}_j\boldsymbol{u}_i^{\mathrm{H}} \tag{19}$$

设 $\boldsymbol{z}_k$ 为 $\boldsymbol{Z}_{\mathrm{aug}}$的第 k 列，则 $\bar{\boldsymbol{R}}_{zz}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4}\boldsymbol{z}_k\boldsymbol{z}_k^{\mathrm{H}}$，根据文献[5]可知，式(19)中的分子项可以表述为

$$\sum_{k,n=1}^{4}\mathrm{E}\{\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{H}}\boldsymbol{z}_k\boldsymbol{z}_k^{\mathrm{H}}\boldsymbol{u}_\upsilon\boldsymbol{u}_\omega^{\mathrm{H}}\boldsymbol{z}_n\boldsymbol{z}_n^{\mathrm{H}}\boldsymbol{u}_i\}=\sum_{k,n=1}^{4}\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{H}}\boldsymbol{y}_k\boldsymbol{y}_n^{\mathrm{H}}\boldsymbol{u}_i\mathrm{E}\{\boldsymbol{u}_\omega^{\mathrm{H}}\boldsymbol{w}_n\boldsymbol{w}_k^{\mathrm{H}}\boldsymbol{u}_\upsilon\}$$
$$+\sum_{k,n=1}^{4}\mathrm{E}\{\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{H}}\boldsymbol{w}_k\boldsymbol{w}_n^{\mathrm{H}}\boldsymbol{u}_i\}\boldsymbol{u}_\omega^{\mathrm{H}}\boldsymbol{y}_n\boldsymbol{y}_k^{\mathrm{H}}\boldsymbol{u}_\upsilon$$

$$+\sum_{k,n=1}^{4}\mathrm{E}\{\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{H}}\boldsymbol{w}_k\boldsymbol{w}_n^{\mathrm{H}}\boldsymbol{u}_i\}\mathrm{E}\{\boldsymbol{u}_\omega^{\mathrm{H}}\boldsymbol{w}_n\boldsymbol{w}_k^{\mathrm{H}}\boldsymbol{u}_\upsilon\} \tag{20}$$

其中,$\boldsymbol{z}_k=\boldsymbol{y}_k+\boldsymbol{w}_k$. 首先,我们将注意力集中到$(\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{H}}\boldsymbol{y}_k\boldsymbol{y}_n^{\mathrm{H}}\boldsymbol{u}_i)$项上来.对于 $k,n\in[1,4]$,设 $\boldsymbol{y}_k,\boldsymbol{y}_n$ 分别为 $\boldsymbol{Y}_{\mathrm{aug}}$的第 k 列和第 n 列,则

$$\boldsymbol{y}_k=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_4\boldsymbol{\Phi}_k\boldsymbol{s}\\ \boldsymbol{\Pi}_L\boldsymbol{A}_4^*(\boldsymbol{\Phi}_k\boldsymbol{s})^*\end{bmatrix},\boldsymbol{y}_n=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_4\boldsymbol{\Phi}_n\boldsymbol{s}\\ \boldsymbol{\Pi}_L\boldsymbol{A}_4^*(\boldsymbol{\Phi}_n\boldsymbol{s})^*\end{bmatrix} \tag{21}$$

其次,我们考虑 $\mathrm{E}\{\boldsymbol{u}_\omega^{\mathrm{H}}\boldsymbol{w}_n\boldsymbol{w}_k^{\mathrm{H}}\boldsymbol{u}_\upsilon\}$.

$$\mathrm{E}\{\boldsymbol{u}_\omega^{\mathrm{H}}\boldsymbol{w}_n\boldsymbol{w}_k^{\mathrm{H}}\boldsymbol{u}_\upsilon\}=\begin{cases}\sigma_n^2\boldsymbol{u}_\omega^{\mathrm{H}}\boldsymbol{u}_\upsilon, & k=n\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \tag{22}$$

其中,σ_n^2 为噪声的方差.将式(21)和(22)代入式(20)中的第 1 项(设为 t_1)可得

$$\begin{aligned}t_1&=\sigma_n^2\sum_{k=1}^{4}\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{H}}\\ &\cdot\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_4\boldsymbol{\Phi}_k\boldsymbol{s}(\boldsymbol{A}_4\boldsymbol{\Phi}_k\boldsymbol{s})^{\mathrm{H}} & \boldsymbol{A}_4\boldsymbol{\Phi}_k\boldsymbol{s}(\boldsymbol{\Pi}_L\boldsymbol{A}_4^*(\boldsymbol{\Phi}_k\boldsymbol{s})^*)^{\mathrm{H}}\\ \boldsymbol{\Pi}_L\boldsymbol{A}_4^*(\boldsymbol{\Phi}_k\boldsymbol{s})^*(\boldsymbol{A}_4\boldsymbol{\Phi}_k\boldsymbol{s})^{\mathrm{H}} & \boldsymbol{\Pi}_L\boldsymbol{A}_4^*(\boldsymbol{\Phi}_k\boldsymbol{s})^*(\boldsymbol{\Pi}_L\boldsymbol{A}_4^*(\boldsymbol{\Phi}_k\boldsymbol{s})^*)^{\mathrm{H}}\end{bmatrix}\\ &\cdot\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_\omega^{\mathrm{H}}\boldsymbol{u}_\upsilon\\ &=4\sigma_n^2\boldsymbol{u}_\omega^{\mathrm{H}}\boldsymbol{u}_\upsilon\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{aug}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{aug}}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{u}_i\end{aligned} \tag{23}$$

设 $\boldsymbol{U}_{\mathrm{aug}}$为 $\boldsymbol{U}$ 的前 K 列,则存在一个可逆矩阵 $\boldsymbol{T}$,使得 $\boldsymbol{U}_{\mathrm{aug}}=\boldsymbol{A}_{\mathrm{aug}}\boldsymbol{T}^{-1}$.因而,

$$\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{aug}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{aug}}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{u}_i=\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}_{\mathrm{aug}}\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}_{\mathrm{aug}}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{u}_i=\begin{cases}\bar{\sigma}_j^2\boldsymbol{q}_j^{\mathrm{H}}\boldsymbol{t}_i, & i,j\leqslant K\\ 0, & i,j>K\end{cases} \tag{24}$$

其中,$\bar{\sigma}_j^2$ 为第 j 个无噪特征值,$\boldsymbol{q}_j$ 为矩阵 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{T}^{-1}$的第 j 列,而 $\boldsymbol{t}_i$ 为矩阵 $\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}$ 的第 i 列.因此对于 $i,j\leqslant K$,我们可以得到

$$t_1=4\sigma_n^2\bar{\sigma}_j^2\boldsymbol{u}_\omega^{\mathrm{H}}\boldsymbol{u}_\upsilon\boldsymbol{q}_j^{\mathrm{H}}\boldsymbol{t}_i \tag{25}$$

类似的,式(20)中的第 2 项和第 3 项可以分别写为

$$t_2=4\sigma_n^2\bar{\sigma}_\omega^2\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{H}}\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{q}_\omega^{\mathrm{H}}\boldsymbol{t}_\upsilon \tag{26}$$

$$t_3=4\sigma_n^4u_j^{\mathrm{H}}\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_\omega^{\mathrm{H}}\boldsymbol{u}_\upsilon \tag{27}$$

综合以上三项,代入式(19)中,同时考虑到 t_1 只有在 $i,j\leqslant K$ 时才不为零,则

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\{\Delta\boldsymbol{u}_\upsilon\Delta u_\omega^{\mathrm{H}}\}=&\frac{\sigma_n^2}{4}\sum_{j=1,j\neq\upsilon}^{K}\sum_{i=1,i\neq\omega}^{K}\frac{\bar{\sigma}_j^2}{(\sigma_v^2-\sigma_j^2)(\sigma_\omega^2-\sigma_i^2)}\boldsymbol{u}_\omega^{\mathrm{H}}\boldsymbol{u}_\upsilon\boldsymbol{q}_j^{\mathrm{H}}\boldsymbol{t}_i\boldsymbol{u}_j\boldsymbol{u}_i^{\mathrm{H}}\\ &+\frac{\sigma_n^2}{4}\sum_{j=1,j\neq\upsilon}^{2L}\sum_{i=1,i\neq\omega}^{2L}\frac{\bar{\sigma}_\omega^2}{(\sigma_v^2-\sigma_j^2)(\sigma_\omega^2-\sigma_i^2)}\boldsymbol{u}_\omega^{\mathrm{H}}\boldsymbol{u}_\upsilon\boldsymbol{q}_\omega^{\mathrm{H}}\boldsymbol{t}_\upsilon\boldsymbol{u}_j\boldsymbol{u}_i^{\mathrm{H}}\\ &+\frac{\sigma_n^2}{4}\sum_{j=1,j\neq\upsilon}^{2L}\sum_{i=1,i\neq\omega}^{2L}\frac{\bar{\sigma}_n^2}{(\sigma_v^2-\sigma_j^2)(\sigma_\omega^2-\sigma_i^2)}\boldsymbol{u}_\omega^{\mathrm{H}}\boldsymbol{u}_\upsilon\boldsymbol{u}_\omega^{\mathrm{H}}\boldsymbol{u}_\upsilon\boldsymbol{u}_j\boldsymbol{u}_i^{\mathrm{H}}\end{aligned} \tag{28}$$

5.2　特征值的扰动分析

由信号子空间的原理可知,$\boldsymbol{A}_{\mathrm{aug}}$和 $\boldsymbol{U}_{\mathrm{aug}}$张成相同的子空间,故存在一个非奇异矩阵 $\boldsymbol{T}$,使得 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{aug}}=\boldsymbol{U}_{\mathrm{aug}}\boldsymbol{T}$.由式(14)和(15)可得

$$\boldsymbol{A}_{s1}\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{A}_{s2} \tag{29}$$

$$\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{\Psi}=\boldsymbol{U}_2 \tag{30}$$

其中,$\boldsymbol{A}_{s1}=\boldsymbol{J}_{\mathrm{aug}}^{(1)}\boldsymbol{A}_{\mathrm{aug}}$,$\boldsymbol{A}_{s2}=\boldsymbol{J}_{\mathrm{aug}}^{(2)}\boldsymbol{A}_{\mathrm{aug}}$,$\boldsymbol{U}_1=\boldsymbol{J}_{\mathrm{aug}}^{(1)}\boldsymbol{U}_{\mathrm{aug}}$,$\boldsymbol{U}_2=\boldsymbol{J}_{\mathrm{aug}}^{(2)}\boldsymbol{U}_{\mathrm{aug}}$.则

$$\boldsymbol{\Psi}=\boldsymbol{U}_1^+\boldsymbol{U}_2=\boldsymbol{T}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{T}^{-1} \tag{31}$$

这里$(\cdot)^+$表示矩阵的伪逆运算.对 $\boldsymbol{\Psi}$ 进行特征值分解可得

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_K\end{bmatrix}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{H}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{q}_K^{\mathrm{H}}\end{bmatrix}\boldsymbol{\Psi}[\boldsymbol{t}_1\quad\cdots\quad\boldsymbol{t}_K] \tag{32}$$

其中,$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{T}^{-1}$,$\boldsymbol{q}_k$ 和 $\boldsymbol{t}_k(k=1,\cdots,K)$分别为 Ψ 的左特征向量和右特征向量.一般要求特征向量尽量是线性独立,使得特征向量经微小扰动后仍能保持其线性独立性.设 $\Delta\lambda_k,\Delta\boldsymbol{q}_k,\Delta\boldsymbol{t}_k$ 和 $\Delta\boldsymbol{\Psi}$ 分别为噪声对$\lambda_k,\boldsymbol{q}_k,\boldsymbol{t}_k$ 和 $\boldsymbol{\Psi}$ 引起的扰动,则在有噪声的情况下,

$$\Delta\lambda_k\approx\boldsymbol{q}_k^{\mathrm{H}}\Delta\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{t}_k+\lambda_k(\Delta\boldsymbol{q}_k^{\mathrm{H}}\boldsymbol{t}_k+\boldsymbol{q}_k^{\mathrm{H}}\Delta\boldsymbol{t}_k) \tag{33}$$

只考虑一阶项,式(33)中的第 2 项近似为零,于是特征值误差的一阶近似值为

$$\Delta\lambda_k\approx\boldsymbol{q}_k^{\mathrm{H}}\Delta\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{t}_k \tag{34}$$

设 $\Delta\boldsymbol{U}_1$ 和 $\Delta\boldsymbol{U}_2$ 分别为矩阵 $\boldsymbol{U}_1$ 和 $\boldsymbol{U}_2$ 上由噪声引起的扰动,如果扰动足够小,仅考虑线性项,可得 $\Delta\boldsymbol{\Psi}$ 的近似表达式为

$$\Delta\boldsymbol{\Psi}\approx\boldsymbol{U}_1^+(\Delta\boldsymbol{U}_2-\Delta\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{\Psi}) \tag{35}$$

通过这个关系式,结合 $\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{t}_k=\lambda_k\boldsymbol{t}_k$,$\Delta\boldsymbol{U}_1=\boldsymbol{J}_{\mathrm{aug}}^{(1)}\Delta\boldsymbol{U}_{\mathrm{aug}}$,$\Delta\boldsymbol{U}_2=\boldsymbol{J}_{\mathrm{aug}}^{(2)}\Delta\boldsymbol{U}_{\mathrm{aug}}$,并令 $\boldsymbol{r}^{\mathrm{H}}(\lambda_k)=\boldsymbol{q}_k^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}_1^+(\boldsymbol{J}_{\mathrm{aug}}^{(2)}-\lambda_k\boldsymbol{J}_{\mathrm{aug}}^{(1)})$,则特征值 λ_k 的误差为

$$\Delta\lambda_k\approx\boldsymbol{r}^{\mathrm{H}}(\lambda_k)\Delta\boldsymbol{U}_{\mathrm{aug}}\boldsymbol{t}_k \tag{36}$$

且 $\Delta\lambda_k$ 的均方值为

$$\sigma(\lambda_k)\approx\boldsymbol{r}^{\mathrm{H}}(\lambda_k)\mathrm{E}\{\Delta\boldsymbol{U}_{\mathrm{aug}}\boldsymbol{t}_k\boldsymbol{t}_k^{\mathrm{H}}\Delta\boldsymbol{U}_{\mathrm{aug}}^{\mathrm{H}}\}\boldsymbol{r}^{\mathrm{H}}(\lambda_k) \tag{37}$$

令 $\boldsymbol{U}_{\mathrm{aug}}=[\boldsymbol{u}_1\quad\cdots\quad\boldsymbol{u}_K]$,$\Delta\boldsymbol{U}_{\mathrm{aug}}=[\Delta\boldsymbol{u}_1\quad\cdots\quad\Delta\boldsymbol{u}_K]$,则上式可以写为

$$\sigma(\lambda_k)=\boldsymbol{r}^{\mathrm{H}}(\lambda_k)\Big(\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K}\boldsymbol{t}_{ik}\boldsymbol{t}_{jk}^{\mathrm{H}}\mathrm{E}\{\Delta\boldsymbol{u}_i\Delta\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{H}}\}\Big)\boldsymbol{r}(\lambda_k) \tag{38}$$

其中,$\boldsymbol{t}_{ik}$为列向量 $\boldsymbol{t}_k$ 的第 i 个元素,且 $\boldsymbol{t}_{ik}$与噪声无关.故由式(19)和式(28)得

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}\{\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{H}}\bar{\boldsymbol{R}}_{zz}\boldsymbol{u}_\upsilon\boldsymbol{u}_\omega^{\mathrm{H}}\bar{\boldsymbol{R}}_{zz}\boldsymbol{u}_i\}=\\ &\frac{1}{4}(\sigma_n^2\bar{\sigma}_j^2\boldsymbol{u}_\omega^{\mathrm{H}}\boldsymbol{u}_\upsilon\boldsymbol{q}_j^{\mathrm{H}}\boldsymbol{t}_i+\sigma_n^2\bar{\sigma}_\omega^2\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{H}}\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{q}_\omega^{\mathrm{H}}\boldsymbol{t}_\upsilon+\sigma_n^4\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{H}}\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_\omega^{\mathrm{H}}\boldsymbol{u}_\upsilon)\end{aligned} \tag{39}$$

定义　$\zeta_{i,j}\overset{\mathrm{def}}{=}\dfrac{\sigma_i^2\sigma_j^2-\bar{\sigma}_i^2\bar{\sigma}_j^2}{(\sigma_i^2-\sigma_j^2)^2}$ 及对角阵 $\boldsymbol{\Gamma}_i=\begin{bmatrix}\mathrm{diag}\{\zeta_{i,j}\}_{j=1}^{i-1} & & \\ & 0 & \\ & & \mathrm{diag}\{\zeta_{i,j}\}_{j=i+1}^{K}\end{bmatrix}$(其第 i 行第 i 列位

置上的元素为零),则式(37)变为

$$\sigma(\lambda_k)=\boldsymbol{r}^{\mathrm{H}}(\lambda_k)\cdot\left[\sum_{i=1}^{K}|t_{ik}|^2\frac{1}{4}\left(\boldsymbol{U}_{\mathrm{aug}}\boldsymbol{\Gamma}_i\boldsymbol{U}_{\mathrm{aug}}^{\mathrm{H}}+\frac{\sigma_i^2\sigma_n^2}{(\sigma_i^2-\sigma_n^2)^2}\boldsymbol{U}_n\boldsymbol{U}_n^{\mathrm{H}}\right)\right]\cdot\boldsymbol{r}(\lambda_k) \tag{40}$$

其中,$\boldsymbol{U}_{\mathrm{aug}}$的各列张成信号子空间,$\boldsymbol{U}_n$ 的各列张成噪声子空间.

前面已经定义了 $\boldsymbol{A}_{s1}=\boldsymbol{J}_{\mathrm{aug}}^{(1)}\boldsymbol{A}_{\mathrm{aug}}$,$\boldsymbol{A}_{s2}=\boldsymbol{J}_{\mathrm{aug}}^{(2)}\boldsymbol{A}_{\mathrm{aug}}$,令 $\boldsymbol{w}_k^{\mathrm{H}}$ 为$\boldsymbol{A}_{s1}^{+}$的第 k 行,则 $\boldsymbol{U}_1^{+}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}_{s1}^{+}$,由此可得阵列的几何参数为

$$\boldsymbol{r}^{\mathrm{H}}(\lambda_k)=\boldsymbol{q}_k^{\mathrm{H}}\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}_{s1}^{+}(\boldsymbol{J}_{\mathrm{aug}}^{(2)}-\lambda_k\boldsymbol{J}_{\mathrm{aug}}^{(1)})=\boldsymbol{w}_k^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{J}_{\mathrm{aug}}^{(2)}-\lambda_k\boldsymbol{J}_{\mathrm{aug}}^{(1)}) \tag{41}$$

利用式(29),可以将式(40)进一步简化为

$$\sigma(\lambda_k)=\frac{\sigma_n^2/\eta_k}{4}\boldsymbol{r}^{\mathrm{H}}(\lambda_k)\boldsymbol{U}_n\boldsymbol{U}_n^{\mathrm{H}}\boldsymbol{r}(\lambda_k) \tag{42}$$

其中,$\frac{1}{\eta_k}=\sum_{i=1}^{K}|t_{ik}|^2\frac{\sigma_i^2}{(\sigma_i^2-\sigma_n^2)^2}$.定义 $\rho(\lambda_k)=\boldsymbol{r}^{\mathrm{H}}(\lambda_k)\cdot\boldsymbol{r}(\lambda_k)$,因为信号子空间 $\boldsymbol{U}_{\mathrm{aug}}$与噪声子空间 $\boldsymbol{U}_n$ 满足性质:$\boldsymbol{U}_{\mathrm{aug}}\boldsymbol{U}_{\mathrm{aug}}^{\mathrm{H}}+\boldsymbol{U}_n\boldsymbol{U}_n^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{I}_{2L}$,因而 $\boldsymbol{r}^{\mathrm{H}}(\lambda_k)\boldsymbol{U}_n\boldsymbol{U}_n^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{r}^{\mathrm{H}}(\lambda_k)\cdot(\boldsymbol{I}_{2L}-\boldsymbol{U}_{\mathrm{aug}}\boldsymbol{U}_{\mathrm{aug}}^{\mathrm{H}})=\boldsymbol{r}^{\mathrm{H}}(\lambda_k)$,令 $\mathrm{SNR}_k=\eta_k/\sigma_n^2$,故式(42)可简化为

$$\sigma(\lambda_k)=\frac{1}{4}\frac{1}{\mathrm{SNR}_k}\rho(\lambda_k) \tag{43}$$

5.3 方向余弦的扰动分析

根据文献[5]可求出相移估计误差的均方值为

$$\sigma(\mu_k)=\mathrm{E}\{|\Delta\mu_k|^2\}=\frac{1}{2}\left(\left|\frac{\mathrm{E}\{|\Delta\lambda_k|^2\}}{\lambda_k^2}\right|-\mathrm{Re}\left[\frac{\mathrm{E}\{|\Delta\lambda_k|^2\}}{\lambda_k^2}\right]\right) \tag{44}$$

相应的,方向余弦估计误差的均方值为

$$\sigma(u_k)=\frac{\lambda\sigma(\mu_k)}{2\pi\Delta}=\frac{\lambda}{8\pi\Delta\mathrm{SNR}_k}\left(\left|\frac{\rho(\lambda_k)}{\lambda_k^2}\right|-\mathrm{Re}\left[\frac{\rho(\lambda_k)}{\lambda_k^2}\right]\right) \tag{45}$$

6 仿真实验

考虑一个中心对称矢量传感器阵列由 5 个均匀排列在 x 轴上的矢量传感器构成,相邻两个阵元的间距取为波长的一半,即:$\Delta=\lambda/2$,则由式(2)可得第 k 个信号的方向余弦估计为:$\hat{u}_k=\frac{\hat{\mu}_k}{\pi}$.为了比较,假设一个中心均匀线型标量传感器阵列由 20 个压力传感器构成,且相邻两个阵元间距为 $\Delta=2\lambda/19$.考虑窄带相干信号个数 $K=2$,加性噪声假设为零均值高斯白噪声,信噪比 SNR 定义为:$\mathrm{SNR}=10\lg(P_s/P_n)$,$P_s$ 和 P_n 分别为信号和噪声的平均功率.

实验 1 单快拍矢量平滑估计算法的性能

(1)信噪比对估计的影响

假设两个等功率窄带相干信号,且它们的参数分别为:俯仰角 $\theta=[50°\quad 15°]$,方位角 $\phi=[70°\quad 110°]$,相干系数 $g=\exp(\mathrm{j}\pi/6)$.图 1 中给出了阵列对空间信号单次采样条件下的方向余弦估计 $\hat{u}$ 的均方根误差(RMSE)随信噪比的变化曲线,并画出了相应的 CRB 曲线.其中,均方根误差(RMSE)定义为:$\mathrm{RMSE}=\sqrt{\sum_{k=1}^{K}(u_k-\hat{u}_k)^2}$.图中,PVFSIA 表示本文提出的单快拍矢量平滑估计算法,SCALAR 表示基于标量传感器阵列的空间平滑估计算法[6],PVFSS 表示基于声矢量传感器阵列的前向空间平滑算法,PVFSIA-Error 表示由式(45)得出的计算值.

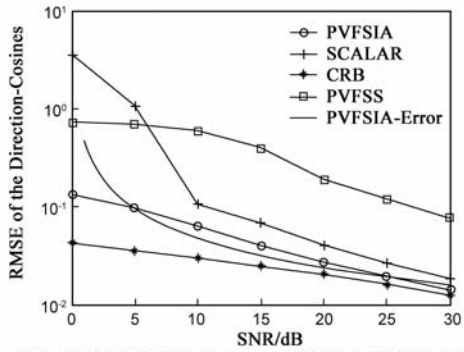


图1 方向余弦估计的RMSE随信噪比的变化曲线

从图 1 中可以看出,对于单快拍矢量平滑估计算法、基于标量传感器阵列的空间平滑估计算法以及基于声矢量传感器阵列的前向空间平滑算法,随着信噪比的增大,方向余弦估计 $\hat{u}$ 的 RMSE 都是逐渐减小的,并且单快拍矢量平滑估计算法的 RMSE 曲线位于空间平滑估计算法的 RMSE 下方,这说明基于单快拍矢量平滑估计算法的估计精度高于空间平滑估计算法的估计精度,尤其在低信噪比(0 ~ 5dB)的情况下这种优势更明显.在高信噪比时,单快拍矢量平滑估计算法的 RMSE 与 CRB 几乎重合,说明估计误差的方差接近于最小值.

(2)相关系数对估计的影响

两个等功率窄带信号的参数与实验(1)相同,加性噪声的信噪比取为 SNR = 20dB.

图 2 中给出了阵列对空间信号单次采样条件下的方向余弦估计 $\hat{u}$ 的 RMSE 随相关系数 ρ 的变化情况.两个相关信号 $s_1(t)$与 $s_2(t)$定义如下:$s_2(t)=\rho^{*}s_1(t)+\sqrt{1-|\rho|^2}s_{20}(t)$,$\angle\rho=\pi/6$,$|\rho|\leqslant 1$,$s_1(t)$和 $s_{20}(t)$不相关.从图 2 可以看出,随着相关系数 ρ 的增大,方向余弦估计 $\hat{u}$ 的 RMSE 都逐渐变小,而且除了$|\rho|=0.4$外,单快拍矢量平滑估计算法的估计性能要优于空间

平滑估计算法.

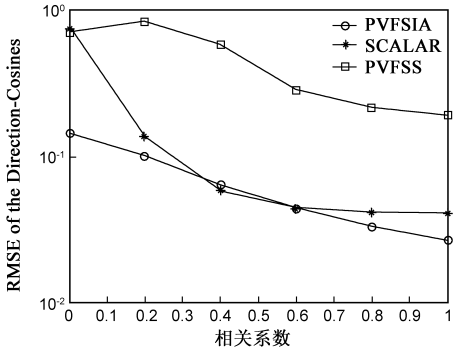


图2　方向余弦估计的RMSE随相关系数的变化曲线

实验 2　跟踪算法的性能比较

假设两个相干的窄带信号,其初始俯仰角为:$\theta = [45° \quad -60°]$,初始方位角为:$\phi = [30° \quad 60°]$.信号移动的角度变化律分别为:$\theta_1 = 45° - t \times 0.05°$,$\theta_2 = -60° + t \times 0.05°$,$\phi_1 = 30° - t \times 0.05°$,$\phi_2 = 60° + t \times 0.05°$.采样次数(快拍数)为 300 次.相干系数仍取 $g = \exp(j\pi/6)$,信噪比取为 SNR = 15dB.基于批处理跟踪算法、基于迭代的跟踪算法以及自适应 MUSIC 跟踪算法[9]分别进行 10 次 Monte-Carlo 仿真实验,方向余弦估计的平均值随快拍数的变化曲线如图 3 所示.这里,对于自适应 MUSIC 算法,信号移动前取 30 个采样点进行初始化,迭代步长 $\mu_1 = 0.08$,$\mu_2 = 100$.

从图 3 的仿真结果可以看出,当信噪比一定时,三种算法中,基于批处理跟踪算法和基于迭代的跟踪算法的跟踪性能都很好,跟踪过程非常稳定,跟踪估计值的精度都非常高;而自适应 MUSIC 跟踪算法的跟踪性能稍差,估计值的波动较大,估计精度也没有前面两种算法高.

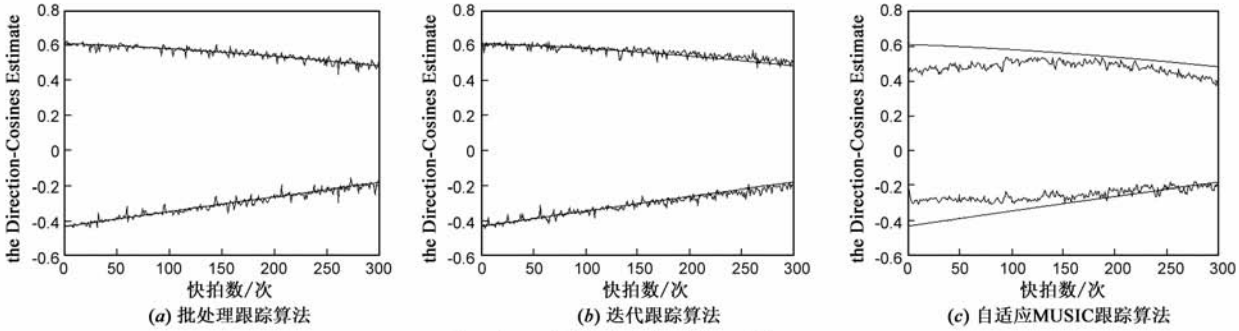


图3　相干信号的方向余弦的跟踪情况

7　结论

本文提出了一种增强阵列有效孔径的单快拍矢量平滑估计算法,对该算法进行了扰动分析,给出了 DOA 估计误差的理论方差表达式,此算法可以用于相干信号的 DOA 快速估计.进一步,为了减少计算量,本文提出了基于迭代的相干信号 DOA 跟踪算法,此算法无需奇异值分解和矩阵求逆运算,具有较快的跟踪速度.理论分析和仿真结果表明:单快拍矢量平滑估计算法具有较好的估计精度;基于迭代的跟踪算法的计算量小于基于批处理跟踪算法;两种算法都有良好的跟踪精度.此外,本文的单快拍平滑算矢量法虽然是基于声矢量传感器阵列提出的,但只需要对传感器的空间响应表达式和矩阵构造形式进行相应修改,算法对于雷达、激光接收阵列也适用.事实上,雷达、激光接收阵列具有极化敏感特性,极化信息的引入,并不仅仅带来了雷达、激光接收阵列信号处理性能的提高,也增大了算法推导的难度.因此,我们已在另一篇论文中对这个问题进行了专门研究.

参考文献

[1] NEHORAI A, PATAN E. Acoustic vector-sensor array processing[J]. IEEE Trans Signal Processing, 1994, 42(9): 2481 – 2491.

[2] 顾陈,何劲,朱晓华,刘中.基于传播算子的声学矢量传感器阵列扩展孔径二维 DOA 估计算法[J].电子学报,2010,38(10):2377 – 2382.
GU Chen, HE Jin, ZHU Xiao-hua, LIU Zhong. Extended-aperture two-dimensional DOA estimation with acoustic vector sensor array using propagator method[J]. Acta Electronica Sinica, 2010, 38(10): 2377 – 2382. (in Chinese)

[3] 常文秀,陶建武,崔伟.基于矢量传感器阵列的"矢量—空间"预处理算法[J].系统工程与电子技术,2010,32(8):1562 – 1566.
CHANG Wen-xiu, TAO Jian-wu, CUI Wei. Preprocessing algorithm for vector-spatial field based on vector-hydrophone array [J]. Systems Engineering and Electronics, 2010, 32(8): 1562 – 1566. (in Chinese)

[4] XU Y, LIU Z. Performance analysis of velocity-pressure smoothing for direction-of-arrival estimation of coherent sig-

nals[J]. International Journal of Adaptive Control Signal Processing, 2010, 24(1): 20 – 32.

[5] TAO Jian-wu, CHANG Wen-xiu, CUI Wei. Direction-finding of coherent signals based on cylindrical vector-hydrophones array[J]. Signal Image and Video Processing, 2010, 4(2): 221 – 232.

[6] THAKRE A, HAARDT M, GIRIDHAR K. Single snapshot spatial smoothing with improved effective array aperture[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2009, 16(6): 505 – 509.

[7] BADEAU R. Fast approximated power iteration subspace tracking[J]. IEEE Trans Signal Processing, 2005, 53(8): 2931 – 2941.

[8] 李辉,王珏,于红梅.逼近幂迭代子空间跟踪算法在多用户系统中的应用研究[J].电子学报,2007,35(12):2363 – 2366.
LI Hui, WANG Jue, YU Hong-mei. Accelerated subspace tracking method and its application to multiuser system[J]. Acta Electronica Sinica, 2007, 35(12): 2363 – 2366. (in Chinese)

[9] 王海陆,徐晓燕,石敏,等.矢量水听器阵列自适应子空间跟踪算法[J].声学技术,2008,27(3):338 – 341.
WANG Hai-lu, XU Xiao-yan, SHI Min, et al. Adaptive subspace tracking algorithm based on acoustic vector sensor array [J]. Technical Acoustics, 2008, 27(3): 338 – 341. (in Chinese)

[10] CHONAVELA T, CHAMPAGNE B, RIOU C. Fast adaptive eigenvalue decomposition: A maximum likelihood approach [J]. Signal Processing, 2003, 83: 307 – 324.

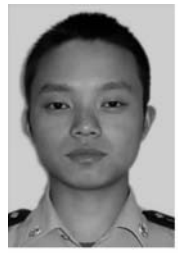
[11] SCHMIDT R O. Multiple emitter location and signal parameter estimation[J]. IEEE Trans AP, 1986, 34(3): 276 – 280.

[12] TANAKA T. Fast generalized eigenvector tracking based on the power method[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2009, 16(11): 969 – 972.

[13] GOLUB G H, VAN-Loan C F, Matrix Computation[M]. Third Edition. Baltimore and London: The Johns Hopkins University Press, 1996.

[14] LEMMA A N, VANDER-Veen A J. Analysis of joint angle-frequency estimation using ESPRIT[J]. IEEE Trans Signal Processing, 2003, 51(5): 1264 – 1283.

作者简介



虞 飞 男,1987 年 11 月 28 日出生于江西省九江市.现为空军航空大学硕士研究生.研究方向为阵列信号处理.
Email: yufei19871128 @163.com

陶建武 男,1959 年 5 月出生于吉林省吉林市,博士,空军航空大学教授,硕士生导师.主要从事阵列信号处理及应用,矢量传感器信号处理等方面的研究工作.2005 年作为访问学者赴加拿大滑铁卢大学电子工程系研修,曾获军队科技进步奖三项,发表论文 60 多篇,其中 40 多篇进入 SCI 和 EI 等国际著名检索.
E-mail: jianwu.tao @gmail.com

李京书 男,1985 年生于吉林省长春市.现为海军工程大学博士研究生.研究方向为惯性传感技术等.
E-mail: elvisstef @163.com